18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid

Language: *Greek*
Δευτέρα, 23 Ιουνίου, 2014.

1. Να βρείτε όλους τους διακεκριμένους πρώτους αριθμούς p, q και r έτσι ώστε
$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

2. Θεωρούμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABC με εμβαδόν S. Έστω $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) και $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Αν H_1 και H_2 είναι τα ορθόκεντρα των τριγώνων MNC και MND αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του τετράπλευρου AH_1BH_2 συναρτήσει του S.

3. Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $abc = 1$. Να αποδείξετε ότι
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a+b+c+1).$$
Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Για κάποιο θετικό ακέραιο n, δύο παίκτες A και B παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: Από ένα σωρό με s πέτρες, παίρνουν εναλλάξ πέτρες με τον A να αρχίζει πρώτος. Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού, ο παίκτης παίρνει είτε μία πέτρα, είτε πρώτο αριθμό από πέτρες, είτε έναν αριθμό από πέτρες που είναι θετικό πολλαπλάσιο του n. Νικητής του παιχνιδιού είναι ο παίκτης ο οποίος παίρνει την τελευταία πέτρα. Αν υποθέσουμε ότι οι A και B παίζουν χωρίς να κάνουν λάθη, τότε για πόσες τιμές του s ο παίκτης A δεν μπορεί να νικήσει;

Χρόνος: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες