18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

Language : *French*
Lundi 23 juin 2014.

1. Trouver tous les nombres premiers distincts p, q et r tels que
$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

2. Soit ABC un triangle acutangle d'aire S. Soit D un point de (AB) tel que (CD)$\perp$(AB), M un point de (AC) tel que (DM)$\perp$(AC) et N un point de (BC) tel que (DN)$\perp$(BC). On note H_1 et H_2 les orthocentres respectifs des triangles MNC and MND. Calculer, en fonction de S, l'aire du quadrilatère AH_1BH_2.

3. Soit a, b, c trois nombres réels strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a+b+c+1).$$
Quels sont les cas d'égalité ?

4. Soit n un entier naturel non nul. Deux joueurs, A et B, jouent au jeu suivant.
À partir d'une pile de s jetons, les joueurs jouent l'un après l'autre ; le joueur A joue en premier. À chaque tour, le joueur qui doit jouer a le choix entre retirer de la pile un jeton, un nombre premier de jetons, ou bien un nombre de jetons divisible par n (et strictement positif). Le joueur qui retire le dernier jeton de la pile gagne la partie.
En supposant que A et B jouent tous les deux de manière parfaite, pour combien de valeurs de s le joueur A est-il condamné à perdre ?

Durée : 4 heures et 30 minutes
Chaque problème est noté sur 10 points