18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

Language: *Bulgarian*
Понеделник, 23 юни 2014

Задача 1. Да се намерят всички различни прости числа p, q и r така, че:

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

Задача 2. Да разгледаме остроъгълен триъгълник ABC с лице S. Нека $CD \perp AB$ $(D \in AB)$, $DM \perp AC$ $(M \in AC)$ и $DN \perp BC$ $(N \in BC)$. С H_1 и H_2 са означени ортоцентровете съответно на триъгълниците MNC и MND. Намерете лицето на четириъгълника AH_1BH_2 чрез S.

Задача 3. Нека a, b и c са положителни реални числа, за които $abc = 1$. Да се докаже, че:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a + b + c + 1).$$

Кога се достига равенство?

Задача 4. За цяло положително число n двама играчи A и B играят следната игра: Дадена е купчина с s камъчета и играчите се редуват, като A играе пръв. На всеки ход съответният играч взима едно камъче, просто число камъчета или кратен на n брой камъчета. Победител е този, който вземе последното камъче. Ако двамата играчи играят по най-добрия начин, за колко стойности на s не е възможно A да е победител?

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Всяка задача се оценява с 10 точки